Rue de la Serre 7
CH-2610 Saint-Imier
Tél. +41 32 930 22 14
Fax +41 32 930 22 15
office@tt-novatech.ch
www.tt-novatech.ch

Version du	09/09/10	Secrétariat général HES-SO ViBIH 2	DT02
Créé par	FRT	Résumé mathématique calibrage	

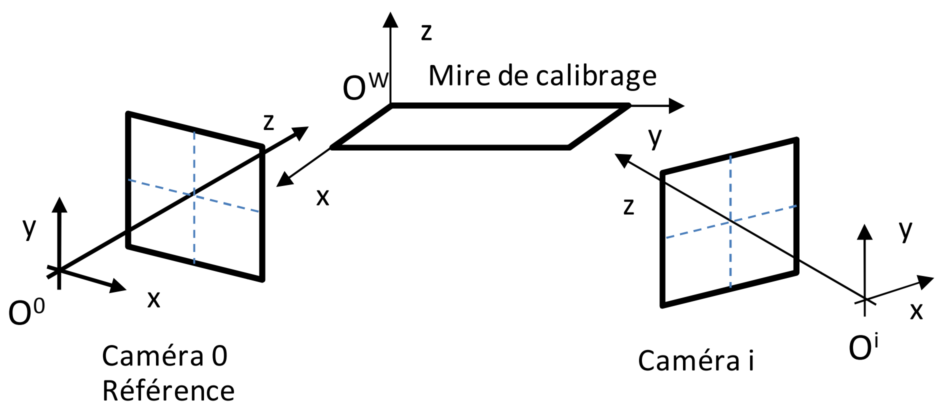
Calibrage multi caméra, mono-mire et multi-mires

1. Introduction

Ce document propose de déterminer les matrices de rotation et les translations permettant d'exprimer un point d'un repère dans un autre, dans le cadre d'un calibrage multi caméras.

La première version, décrite au chapitre 2, consiste à utiliser une seule mire visible simultanément pas plusieurs caméra et à pouvoir passer d'un système lié à une caméra de référence à toutes les autres caméras. La seconde utilise une mire de référence vue par au moins une caméra et d'autres mires vues par au moins deux mires chacune. Le but consiste à pouvoir exprimer tout point référencé dans un système lié à une caméra au système lié au monde (mire).

2. Calibrage multi caméra, mono-mire



Après un calibrage extrinsèque d'une caméra de référence, on a obtenu R^{W0} et $\vec{t}^{\,W0}$. On peut exprimer un point lié au référentiel du monde $\vec{x}^W$ dans le repère lié à la caméra 0, $\vec{x}^0$

$$\vec{x}^0 = R^{W0} \cdot \vec{x}^W + \vec{t}^{\,W0}$$

A l'inverse, on peut exprimer un point lié au référentiel de la caméra 0 $\vec{x}^0$ dans le référentiel lié au monde $\vec{x}^W$.

$$\vec{x}^W = \left(R^{W0}\right)^T \cdot \left(\vec{x}^0 - \vec{t}^{\,W0}\right)$$

On peut faire de même pour une autre camera, par exemple la ième caméra de notre système :

$$\vec{x}^{i} = R^{Wi} \cdot \vec{x}^{W} + \vec{t}^{Wi} \text{ et } \vec{x}^{W} = \left(R^{Wi}\right)^{T} \cdot \left(\vec{x}^{i} - \vec{t}^{Wi}\right)$$

1) On cherche à exprimer un point dans le repère lié à la ième caméra, à la caméra de référence la caméra 0.

$$\vec{x}^{0} = R^{W0} \cdot \vec{x}^{W} + \vec{t}^{W0} =$$

$$\vec{x}^{0} = R^{W0} \cdot \left(\left(R^{Wi}\right)^{T} \cdot \left(\vec{x}^{i} - \vec{t}^{Wi}\right)\right) + \vec{t}^{W0}$$

$$\vec{x}^{0} = \underbrace{R^{W0} \cdot \left(R^{Wi}\right)^{T}}_{R^{i0}} \cdot \vec{x}^{i} + \underbrace{\left(-R^{W0} \cdot \left(R^{Wi}\right)^{T} \cdot \vec{t}^{Wi} + \vec{t}^{W0}\right)}_{t^{i0}}$$

Ainsi la position du centre optique de la caméra i, exprimé dans le système de référence vaut :

$$\vec{x}^{0} = R^{i0} \cdot \vec{x}^{i} + \vec{t}^{i0}$$

2) En sens inverse on a.

$$\vec{x}^{i} = R^{Wi} \cdot \vec{x}^{W} + \vec{t}^{Wi}$$

$$\vec{x}^{i} = R^{Wi} \cdot \left(\left(R^{W0}\right)^{T} \cdot \left(\vec{x}^{0} - \vec{t}^{W0}\right)\right) + \vec{t}^{Wi}$$

$$\vec{x}^{i} = \underbrace{R^{Wi} \cdot \left(R^{W0}\right)^{T}}_{R^{0i}} \cdot \vec{x}^{0} + \underbrace{\left(-R^{Wi} \cdot \left(R^{W0}\right)^{T} \cdot \vec{t}^{W0} + \vec{t}^{Wi}\right)}_{t^{0i}}$$

En résumé

$$\left|\begin{array}{l} \vec{x}^{0} = R^{i0} \cdot \vec{x}^{i} + t^{i0} \\ avec \\ R^{i0} = R^{W0} \cdot \left(R^{Wi}\right)^{T} \\ t^{i0} = -R^{W0} \cdot \left(R^{Wi}\right)^{T} \cdot \vec{t}^{Wi} + \vec{t}^{W0} \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} \vec{x}^{i} = R^{0i} \cdot \vec{x}^{0} + t^{0i} \\ avec \\ R^{0i} = R^{Wi} \cdot \left(R^{W0}\right)^{T} \\ t^{0i} = -R^{Wi} \cdot \left(R^{W0}\right)^{T} \cdot \vec{t}^{W0} + \vec{t}^{Wi} \end{array}\right.$$

Autre approche mathématique:

Soit

$$\vec{x}^{i} = R^{Wi} \cdot \left(R^{W0}\right)^{T} \cdot \vec{x}^{0} - R^{Wi} \cdot \left(R^{W0}\right)^{T} \cdot \vec{t}^{W0} + \vec{t}^{Wi}$$

On peut déterminer x0

$$R^{Wi} \cdot \left(R^{W0}\right)^{T} \cdot \vec{x}^{0} = \vec{x}^{i} + R^{Wi} \cdot \left(R^{W0}\right)^{T} \cdot \vec{t}^{W0} - \vec{t}^{Wi}$$

$$\left(R^{Wi}\cdot\left(R^{W0}\right)^T\right)^T R^{Wi}\cdot\left(R^{W0}\right)^T\cdot\vec{x}^0=\left(R^{Wi}\cdot\left(R^{W0}\right)^T\right)^T\left(\vec{x}^i+R^{Wi}\cdot\left(R^{W0}\right)^T\cdot\vec{t}^{W0}-\vec{t}^{Wi}\right)$$

$$\vec{x}^0=\left(R^{W0}\right)\ \left(R^{Wi}\right)^T\left(\vec{x}^i+R^{Wi}\cdot\left(R^{W0}\right)^T\cdot\vec{t}^{W0}-\vec{t}^{Wi}\right)$$

$$\vec{x}^0=\left(R^{W0}\right)\ \left(R^{Wi}\right)^T\vec{x}^i+\underbrace{\left(R^{W0}\right)\underbrace{\left(R^{Wi}\right)^T R^{Wi}}_{I}\left(R^{W0}\right)^T}_{I}\cdot\vec{t}^{W0}-\left(R^{W0}\right)\ \left(R^{Wi}\right)^T\vec{t}^{Wi}$$

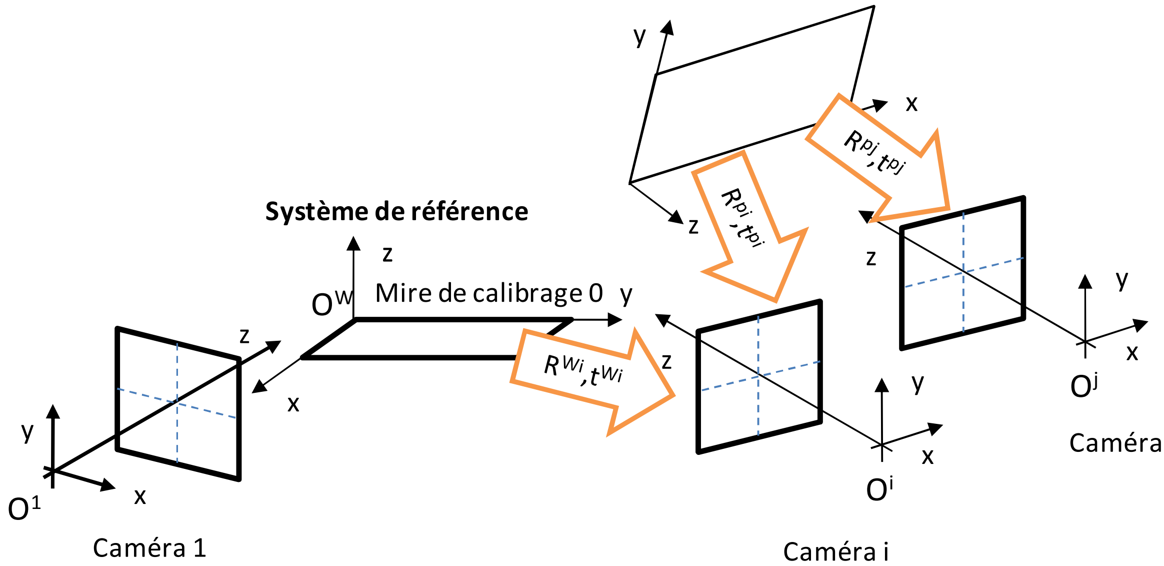
$$\vec{x}^0=\left(R^{W0}\right)\left(R^{Wi}\right)^T\vec{x}^i-\left(R^{W0}\right)\left(R^{Wi}\right)^T\vec{t}^{Wi}+\vec{t}^{W0}$$

cqfd

3. Calibrage multi caméra, multi-mires

Situation : On désire exprimer dans le repère liée au monde (la mire de calibrage W), tous les points référencés dans les systèmes de coordonnées liés au centre optique des caméras.

Une caméra au moins est calibrée par rapport au référentiel lié au monde. Les autres sont calibrées n à n, avec n<=2, à partir de mires positionnées de manière quelconque dans l'espace.



But : Déterminer la matrice et la translation permettant d'exprimer un point lié au référentiel de la caméra j dans le repère du monde.

$$\vec{x}^W=R^{jW}\cdot\vec{x}^j+t^{jW}$$

Hypothèse : Soit une caméra i dont les paramètres de changement de repère avec le référentiel d'origine sont connus,

$$\vec{x}^W=R^{iW}\cdot\vec{x}^i+t^{iW}$$

supposons de plus que la caméra i a été calibrée conjointement avec la caméra j sur la mire p. On a ainsi obtenu les transformations R^{pi}, $\vec{t}^{pi}$, R^{pj} et $\vec{t}^{pj}$ avec les relations suivantes

$\vec{x}^i=R^{pi}\cdot\vec{x}^p+t^{pi}$ et $\vec{x}^j=R^{pj}\cdot\vec{x}^p+t^{pj}$, donc $\vec{x}^p=\left(R^{pj}\right)^T\left(\vec{x}^j-t^{pj}\right)$

1) Pas initial de calibrage par rapport au monde (mire de référence posée au sol)

Soient R^{W1} et $\vec{t}^{\,W1}$ la matrice et la rotation obtenus par calibrage extrinsèque de la caméra 1 par rapport à la mire de référence W. On a la relation suivante :

$$\vec{x}^{1} = R^{W1} \cdot \vec{x}^{W} + \vec{t}^{\,W1}$$

On s'intéresse au cas contraire soit exprimer tout point dans le repère lié au monde

$$\vec{x}^{W} = \left(R^{W1}\right)^{T} \cdot \left(\vec{x}^{1} - \vec{t}^{\,W1}\right)$$

$$\vec{x}^{W} = \underbrace{\left(R^{W1}\right)^{T}}_{R^{1W}} \cdot \vec{x}^{1} - \underbrace{\left(R^{W1}\right)^{T} \vec{t}^{\,W1}}_{\vec{t}^{\,1W}}$$

Donc

$$\vec{x}^{W} = R^{1W} \cdot \vec{x}^{1} + \vec{t}^{\,1W}$$

avec

$$R^{1W} = \left(R^{W1}\right)^{T}$$

$$\vec{t}^{\,1W} = -\left(R^{W1}\right)^{T} \vec{t}^{\,W1}$$

2) Au pas i, calibrage par rapport à une mire mobile.
On détermine ensuite la transformation qui permet de passer de la caméra j au repère lié au monde.

$$\begin{aligned}
\vec{x}^{W} &= R^{iW} \cdot \vec{x}^{i} + t^{iW} \underbrace{=}_{\vec{x}^{i} = R^{pi} \cdot \vec{x}^{p} + t^{pi}} \\
&= R^{iW} \cdot \left(R^{pi} \cdot \vec{x}^{p} + t^{pi}\right) + t^{iW} \underbrace{=}_{\vec{x}^{p} = \left(R^{pj}\right)^{T} \left(\vec{x}^{j} - t^{pj}\right)} \\
&= R^{iW} \cdot \left(R^{pi} \cdot \left(\left(R^{pj}\right)^{T} \left(\vec{x}^{j} - t^{pj}\right)\right) + t^{pi}\right) + t^{iW} \\
&= \underbrace{\left(R^{iW} \cdot R^{pi} \cdot \left(R^{pj}\right)^{T}\right)}_{R^{jW}} \vec{x}^{j} + \underbrace{t^{iW} + R^{iW} \cdot t^{pi} - R^{iW} \cdot R^{pi} \cdot \left(R^{pj}\right)^{T} \cdot t^{pj}}_{t^{jW}}
\end{aligned}$$

4. Conclusion

Ce document propose de déterminer les matrices de rotation et les translation permettant d'exprimer un point d'un repère dans un autre. Les méthodes développées ont pu être validées expérimentalement.